

Equation de Bessel

Théorème: Soit (B): $(t^2 x'' + x' + tx = 0)$ équation de Bessel avec $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

① Il existe une unique solution f de (B) développable en série entière autour de 0, $f(0)=1$.

② Soit $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (B). On a (f, g) liée $\Leftrightarrow g$ non bornée au voisinage de 0.

①

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que $f: t \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ solution de (B), avec $f(0)=a_0=1$.

On a $\forall t \in]-R, R[$, $tf'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} t^n$, $f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n t^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} (n+2) t^n + a_2$ et

$tf''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+1) t^n$. Alors $0 = tf''(t) + f'(t) + tf(t) = a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+2} + (n+1)a_{n+1}) t^n$.

Par unicité du développement, on a $a_2 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+2} = -\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{2n+2} = 0$ et

$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(n!)^2 (2n-2)! \dots 2!} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$. Réciproquement la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} t^{2n}$ a pour rayon

de convergence $R = +\infty$. En effet, par d'Alembert on a $\frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{4^{n+1} (n+1)!^2} \times \frac{4^n n!^2}{(-1)^n t^{2n}} = \frac{-t^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $f: t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} t^{2n}$ a ses coefficients qui vérifient $\textcircled{*}$, et est solution de (B) avec $f(0)=1$.

② $(\Leftarrow)$

Soit $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (B). Si (f, g) liée, alors g bornée au voisinage de 0 car f l'est.

 $(\Rightarrow)$

Supposons (f, g) liée. On réécrit l'ED (B) $(X' = A(t)X)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc l'ensemble des solutions de (B) sur $\mathbb{R}_+^*$ est de dimension 2, et (f, g) en est une base. De plus,

le wronskien associé $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$ vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $W'(t) = \text{Tr}(A(t)) W(t) = -\frac{1}{t} W(t)$. Donc $\exists C \in \mathbb{R}^*$

tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $W(t) = C e^{-\ln t} = -\frac{C}{t} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Supposons g bornée autour de 0.

Puisque $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, on a $g'(t) \sim -\frac{C}{t}$. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$, sur $]0, b]$ $t \mapsto -\frac{C}{t}$ est

de signe constant et non intégrable. Donc $g(b) - g(0) = \int_0^b g'(s) ds \sim \int_0^b -\frac{C}{s} ds = -C(\ln b - \ln 0)$

Alors $g(t) \sim -C \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \pm \infty$, c'est absurde. Donc g n'est pas bornée au voisinage de 0.

Application: On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} t^{2n}$

On a $g: t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta$ solution bornée de (B). Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$\lambda f(t) = g(t)$, venant en $t=0$ par continuité. Donc $\lambda = \lambda f(0) = g(0) = 1$ et $f = g$ sur $\mathbb{R}$ par unicité. $\square$

Lemme: La fonction $g: t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta) d\theta$ solution bornée de (B)

On a $h: (t, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \mapsto \frac{1}{\pi} \cos(t \sin \theta)$ est C^∞ . Donc g est bien def et est C^∞ sur $\mathbb{R}$ par théorème de dérivation ($\theta \mapsto h(t, \theta)$ continue sur le compact $[0, \pi]$). Donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) \sin(t \sin \theta) d\theta \quad \text{et} \quad g''(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta)^3 \cos(t \sin \theta) d\theta, \text{ et}$$

$$\begin{aligned} t g''(t) + g'(t) + t g'(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t(1 - \sin(\theta)^4) \cos(t \sin \theta) - \sin(\theta) \sin(t \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos(\theta)^4 \cos(t \sin \theta) - \sin(\theta) \sin(t \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} [\cos(\theta) \sin(t \sin \theta)]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} (-\sin(0) - \sin(0)) = 0 \end{aligned}$$

Avec $|g(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 d\theta = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, g solution bornée de (B), avec $g(0) = 1$. $\square$